

حل تشریحی
تحلیل و مقاومت
دکتری ۹۸

تهیه : پیام شیرزادی

@phd_omran

۱- درایه تیر بر روی بستری از تپجای به طول ۹m و مقطع مستطیلی به عرض ۱۲cm و عرض ۴cm تحت اثر بار گسترده یکدانه به شدت q ، اگر عکس العمل بستری به صورت خطی از صفر در کناره ها تا حداکثر در وسط تیر تغییر کند، حداکثر تنش خمشی مجاز ۱۲۰ mpa باشد، حداکثر مقدار مجاز q چند $\frac{kN}{m}$ است ؟

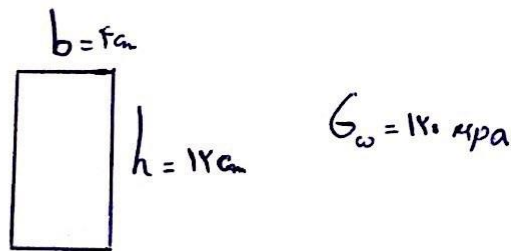
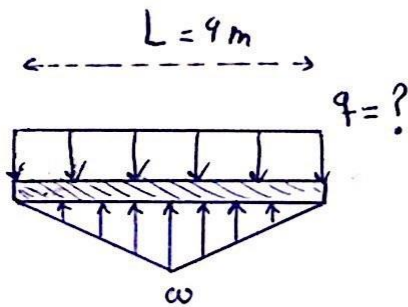
۷,۹۸ ۲۴

۵,۱۲ ۱۱۳

۳,۸۴ ۲۲

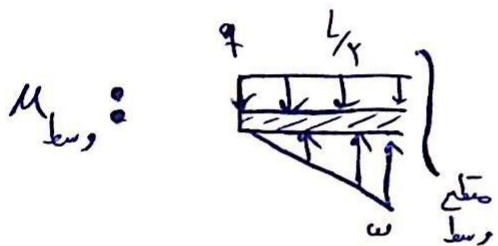
۲,۵۲ ۱۱

حل: گزینی ۴ = صحیح است.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{\omega L}{2} = qL \rightarrow \omega = 2q$$

با فرض حداکثر شدن تنش در وسط تیر:



$$\Rightarrow M_{\text{وسط}} = \left| q \frac{L}{2} \left(\frac{L}{4} \right) - \frac{\omega L}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \times L \right) \right| = \frac{qL^2}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{Mc}{I} \leq \sigma_w \Rightarrow \frac{\left(\frac{qL^2}{24} \right) \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{bh^3}{12}} \leq \sigma_w \Rightarrow q \leq \frac{4bh^2\sigma_w}{L^2}$$

با گذاری b, h, L

$$q_{\text{max}} = 7,98 \frac{kN}{m}$$

۲- در یک مقطع دیوار نازک حلقوی به شعاع متوسط R ، ضخامت t ، تحت یک نیروی متحرکز P اعمالی به اندازه قطر محلی در محل شعاع متوسط در تراز قطر افقی (سمت چپ یا راست)، تنش برشی حداکثر به ضریبی از $\frac{P}{\pi R t}$ است.

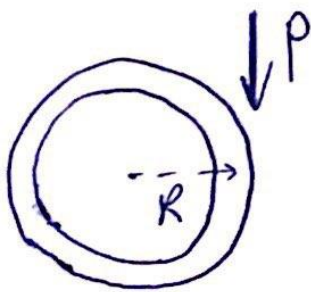
۲ « ۴

$\frac{۳}{۲}$ « ۳

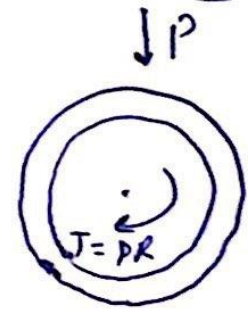
۱ « ۲

$\frac{۱}{۲}$ « ۱

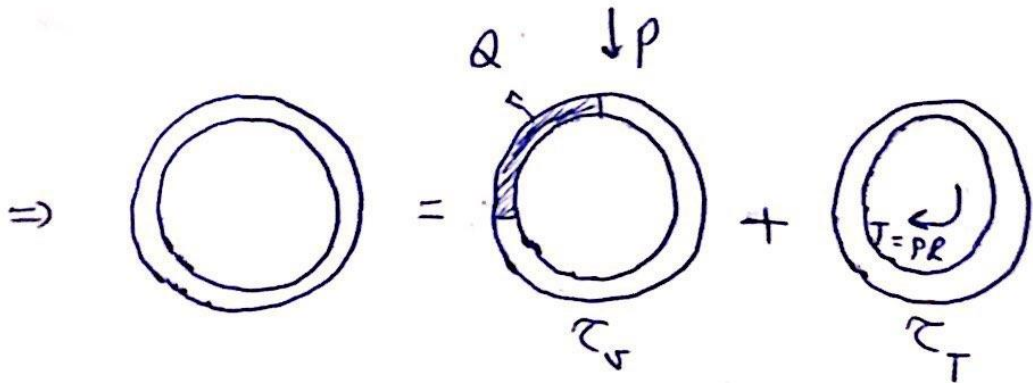
حل: گزینش ۳ صحیح است.



انتقال بار P به محل مرکز برش



در مقطع هم تنش برشی ناشی از P در هم ناشی از لنگر میانی داریم.



$$\Rightarrow \tau_{max} = \tau_r + \tau_t = \frac{\sqrt{3}Q}{It} + \frac{T}{\sqrt{2}A_n t}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{(P) \left[\frac{\sqrt{3}\pi R}{4} \left(\frac{\sqrt{3}R}{\pi} \right) \right]}{(\pi R^3 t)(t)} + \frac{PR}{\sqrt{2}(\pi R^2) t} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi R t}$$

۳- ورق به شکل مربع از ۴ طرف توسط چهار جداره‌ی صلب و ثابت نگه داری شده است. اگر دمای ورق به اندازه‌ی 50°C افزایش یابد، تنش‌های ایجاد شده در صفحه چند μpa است؟ ($E=200\text{Gpa}$ ، $\nu=\frac{1}{4}$ ، $\alpha=9 \times 10^{-6}$ ، ضرایب ورق طوری است که تنش ندارد در تنش عمود بر صفحه صفر است)

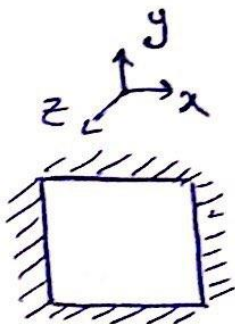
۱۸۰ «۴»

۱۲۰ «۳»

۹۰ «۲»

۶۰ «۱»

حل: گزینی ۳ صحیح است.



$$\sigma_z = 0$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0$$

به دلیل تقارن $\sigma_x = \sigma_y$ باشد.

$$\text{رابطه‌ی پواسن: } \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) + \alpha\Delta T = 0$$

$$\xrightarrow{\sigma_x = \sigma_y} \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_x) = -\alpha\Delta T \Rightarrow \left(\frac{1-\nu}{E}\right)\sigma_x = -\alpha\Delta T$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{-\alpha\Delta T E}{1-\nu} \xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{جاگذاری}} \frac{-9 \times 10^{-6} \times 50 \times 200 \times 10^9 (\mu\text{pa})}{1 - \frac{1}{4}} = -120 \mu\text{pa}$$

۴- یک سیم به طول L ، سطح مقطع A و وزن مخصوص γ از یک تکیه گاه
گهردار آویزان است. اگر رابطه تنش-کشش به صورت $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$
(B ضریب ثابت) باشد، افزایش طول انتهای سیم به ضریبی از $\frac{\gamma^2 L^3}{B^2}$ است؟

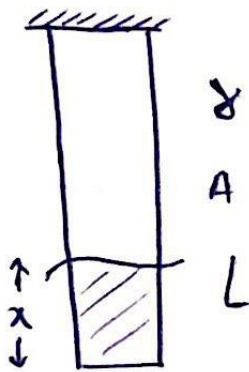
$$\frac{A}{3} \lll ۴$$

$$\frac{A}{2} \lll ۳$$

$$\frac{1}{3} \lll ۲$$

$$\frac{1}{2} \lll ۱$$

حل: کشش $\epsilon = ۲$ صحیح است.



$$G_{(x)} = \frac{F}{A} = \frac{\text{وزن}}{\text{مساحت}} = \frac{\gamma \sqrt{x}}{A}$$

$$\Rightarrow G_{(x)} = \frac{\gamma A x}{A} = \gamma x \quad \text{I}$$

$$\sigma = B\sqrt{\epsilon} \quad \text{II}, \quad \epsilon = \frac{d\Delta x}{dx}$$

تعریف کشش جزئی

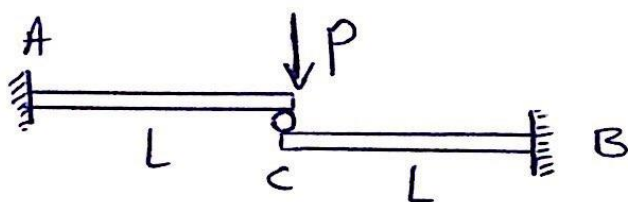
$$\Rightarrow \text{I, II: } \gamma x = B\sqrt{\frac{d\Delta x}{dx}} \Rightarrow \left(\frac{\gamma x}{B}\right)^2 = \frac{d\Delta x}{dx}$$

$$\Rightarrow d\Delta x = \frac{\gamma^2 x^2}{B^2} dx \rightarrow \Delta x = \int \frac{\gamma^2 x^2}{B^2} dx$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر حد انتگرال}} \Delta = \int_0^L \frac{\gamma^2 x^2}{B^2} dx = \frac{1}{3} \frac{\gamma^2 L^3}{B^2}$$

۱- تیر ترکیبی ABC مطابق شکل در محل خستگی (بدون لوله‌کشی) تحت اثر نیروی P قرار دارد. اگر سختی خمشی EI باشد، M_A و M_B ، A_y و B_y کداسند؟

$$۱ \quad \frac{P}{2}, \frac{P}{2}, \frac{PL}{2}, \frac{PL}{2}$$



$$۲ \quad \frac{P}{2}, \frac{P}{2}, PL, PL$$

$$۳ \quad P, P, \frac{PL}{2}, \frac{PL}{2}$$

$$۴ \quad P, P, PL, PL$$

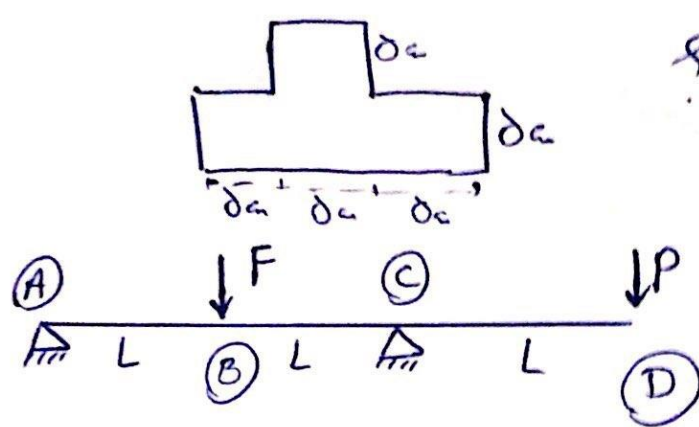
حل: گزینی ۱ صحیح است.

تیرهای AC و BC، $\frac{3EI}{L^3}$ ی باشند، پس بار P به نسبت

صداقی بین آنها تقسیم می شود:

$$\left. \begin{array}{l} \text{AC} \quad \downarrow \frac{P}{2} \\ \text{CB} \quad \downarrow \frac{P}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} M_A = M_B = \frac{PL}{2} \\ A_y = B_y = \frac{P}{2} \end{cases}$$

۹- سازه ABCD با مقطع زیر (ابعاد به cm) تحت نیروی F و P قرار دارد.
 اگر $L = ۳m$ باشد، حداکثر تنش فشاری مقطع در نقاط B و C به ازای

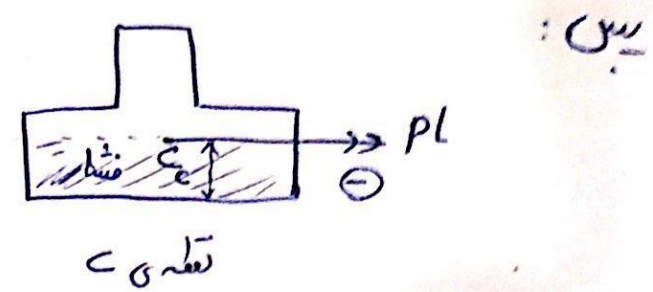
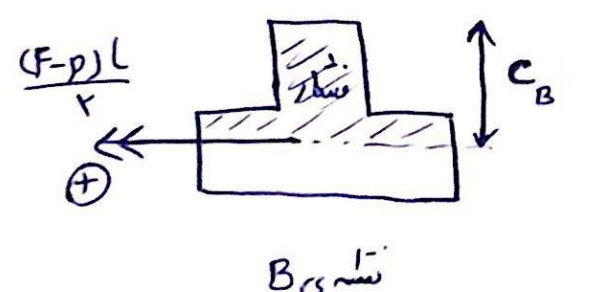


نسبتی از $\frac{F}{P}$ برابر است؟
 $\frac{۷}{۳} = ۲$ $\frac{۱۱}{۵}$
 $\frac{۳}{۷} = ۲$ $\frac{۵}{۱۱}$

حل: گزینی! = صریح است.

$$\sum M_C = 0 \rightarrow R_A(xL) + PL = FL \Rightarrow R_A = \left(\frac{F-P}{x}\right) \Rightarrow M_B = \frac{(F-P)L}{x} [+]$$

$$M_C = PL [-]$$



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(10 \times 5 \times \frac{5}{4}) + (5 \times 5 \times \frac{10}{4})}{(10 \times 5) + (5 \times 5)} = \frac{10}{4}$$

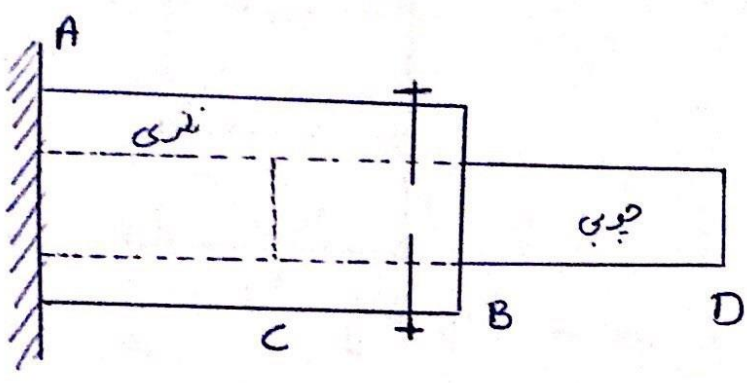
[مرکز سطح از پایین سطح]

$$\sigma_{max B} = \sigma_{max C} \Rightarrow \frac{(F-P) \frac{L}{x} \times [10 - \frac{10}{4}]}{I} = \frac{PL \times \frac{10}{4}}{I} \Rightarrow \frac{F}{P} = \frac{11}{5}$$

۱- یک میله چوبی CD به قطر ۷۵ cm در لوله فولادی AB به قطر ۱۰ cm و طول ۷۰ cm قرار گرفته و دور تا دور محل اتصال از پیچ‌هایی به قطر ۱۰ mm در شش برشی مجاز ۱۴۰ MPa استفاده شده. اگر لنگ آ در انتهای D اعمال شود، حداکثر تنش برشی در عصب چوبی ۸ MPa باشد، تعداد پیچ‌های لازم در محل اتصال کدام است؟

قرار گرفته و دور تا دور محل اتصال از پیچ‌هایی به قطر ۱۰ mm در شش برشی مجاز ۱۴۰ MPa استفاده شده. اگر لنگ آ در انتهای D اعمال شود، حداکثر تنش برشی در عصب چوبی ۸ MPa باشد، تعداد پیچ‌های لازم در محل

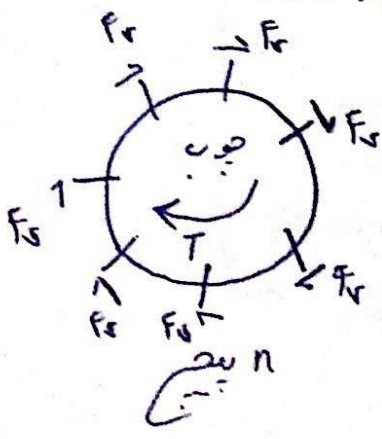
اتصال کدام است؟



- ۱۰ (۲)
- ۱۴ (۱)
- ۵ (۴)
- ۸ (۳)

حل: گزینی ۲ = پیچ ۱۰ است. $R = 10 \text{ cm}$ $d_b = 0.1 \text{ cm}$ $\tau_{allow} = 140 \text{ MPa}$

هر کدام از پیچ‌ها و همچنین اتصال لنگ از میله چوبی به فولادی را دارند:



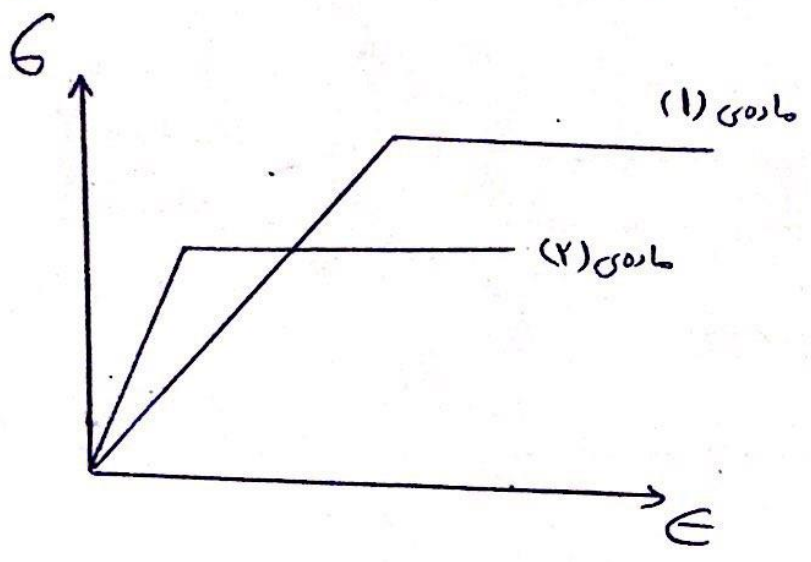
$$T = n (F_v \cdot R) \Rightarrow \frac{\tau_j}{R} = n F_v \cdot R$$

$$\Rightarrow F_v = \text{تنش پیچ} = \tau_{bw} \cdot A_b$$

$$\Rightarrow n = \frac{\tau_j}{F_v \cdot R^2} = \frac{\tau_j}{\tau_{bw} \cdot A_b \cdot R^2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{140 \times \frac{\pi}{4} (10)^2}{140 \times \frac{\pi}{4} (0.1)^2 \times (75)^2} = 10$$

۱- دیاگرام تنش-کرنش ماده‌ی شکل زیر را در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟



- ۱ « سختی \uparrow ، پهن‌سازی \uparrow و عیار است \uparrow کمتر از \uparrow
- ۲ « سختی \uparrow ، پهن‌سازی \uparrow و عیار است \uparrow بیشتر از \uparrow
- ۳ « سختی \uparrow ، کمتر از \uparrow و عیار است \uparrow کمتر از \uparrow
- ۴ « سختی \uparrow ، کمتر از \uparrow و عیار است \uparrow بیشتر از \uparrow

حل: گزینه ۴ صحیح است.

شیب خط تنش-کرنش بیانگر سختی و محل شکستگی بیشترین عیار است را نشان

می‌دهد پس گزینه ۴ صحیح است

۹- بارهای خود کشش نظیر نشست تکرر گاهی، نقص عضو و اثرات دینامیک در کدام نوع سازه ها، روی توزیع نیروهای داخلی اثر دارد؟

۱۱، چینی استاتیکی

۱۲، ناچینی استاتیکی

۱۳، چینی دینامیکی استاتیکی

۱۴، بدون اثر در نیروهای داخلی

حل: گزینه ۲ صحیح است.

در سازه های ناچینی استاتیکی (همپراستاتیکی) در اثر عوامل لرزه ای

ذکر شده، یک نیروی همبندی معادل کننده در سازه ایجاد می شود.

۱۰ - دو سطح مستطیل و لوزی دارای مساحت و ضلع یکسان هستند. کدام
گزینه نادرست است؟

۱ «سقطی برشی لوزی بیشتر از سقطی برشی مستطیل و سقطی خمشی مستطیل بیشتر از لوزی

۲ «سقطی برشی لوزی بیشتر از سقطی برشی مستطیل و سقطی محوری مستطیل برابر سقطی محوری لوزی

۳ «سقطی خمشی لوزی کمتر از سقطی خمشی مستطیل و سقطی محوری مستطیل برابر لوزی

۴ «سقطی خمشی لوزی کمتر از سقطی خمشی مستطیل و سقطی برشی مستطیل بیشتر از سقطی برشی لوزی

حل: گزینه ۴ صحیح است.

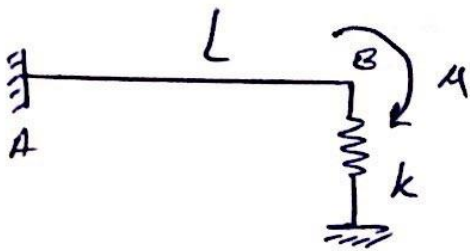
تنش مجاز نرمال = σ_k

تنش مجاز برشی = τ_k

به طور کلی در بحث مایه‌ی ظرفیت‌های برشی و خمشی، می‌گوییم در ۲ مقطع که هم خمش و دارای مساحت یکسان هستند، هرچه قدر تجمع گوشه مقطع در تارفتی بیشتر باشد اصطلاحاً (جان) مقطع توپر تر ظرفیت برشی افزایش می‌یابد و هرچه تجمع گوشه مقطع از تارفتی دورتر باشد اصطلاحاً می‌گوییم (بال) مقطع بزرگتر شده و ظرفیت خمشی افزایش می‌یابد و ظرفیت محوری هم که به مساحت و جنس بستگی دارد برابر است.

۱۱ - تیر AB به طول L و سختی خمشی EI مطابق شکل تحت گشت م قرار دارد.
 به ازای چه قدرتی از α در سختی فنر ($k = \frac{EI}{\alpha L^3}$)، تیر در طول خود دارای

نقطه‌ی عطف است؟



$\alpha < \frac{1}{6}$ "۲"

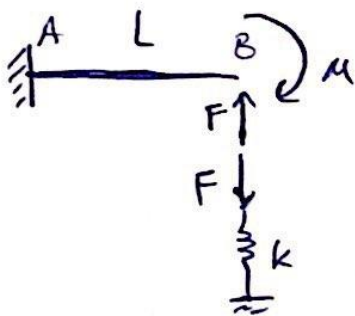
$\alpha < \frac{1}{3}$ "۱"

$\alpha > \frac{1}{6}$ "۴"

$\alpha > \frac{1}{3}$ "۳"

حل: گذرین = صیغ اول است.

ابتدا تیری فنر را می‌بینیم:



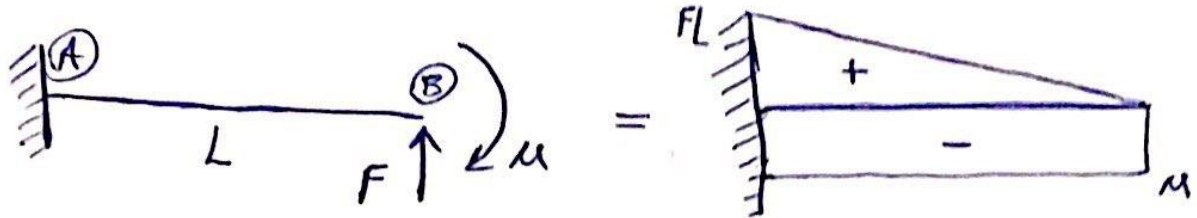
مزد = $\delta_{تیر}$

$$\Rightarrow \frac{4L^2}{2EI} - \frac{FL^3}{3EI} = \frac{F}{k} \quad \xrightarrow{k = \frac{EI}{\alpha L^3}}$$

$$\frac{4L^2}{2EI} = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{F\alpha L^3}{EI} \rightarrow \boxed{FL \left(\frac{1}{3} + \alpha \right) = \frac{4}{2}} \quad \text{I}$$

حالی خواهیم در طول تیر نقطه‌ی عطف ایجا شد و می‌دانیم که نقطه‌ی عطف نقطه‌ای است که گشت در آن صفر است پس:

نمودار گشتیرانی کشش:



برای آن که نقطه‌ی عطف ایجاد شود باید درین نقطه گشتیرانی شود. اگر $M > FL$ باشد پس همواره نمودار گشتیرانی منفی است و هیچ وقت جایی گشتیرانی سوداگانه نیست. اگر $M < FL$ باشد، چون نمودار گشتیرانی + از همسر شروع شده، یعنی جایی می‌رسد که گشتیرانی + و - برابر شده و گشتیرانی سوداگانه $M < FL$ باشد:

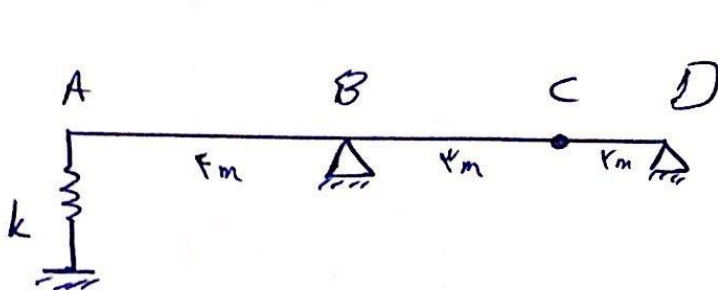
$$M < FL \xrightarrow{\text{I}} 2FL \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) < FL$$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \rightarrow \alpha < \frac{1}{6}$$

۱۲ - از روی تیر ABCD باری به شدت $\frac{1}{3} \frac{kN}{m}$ در سه طول $5m$ می گذرد.

حد اکثر تغییر مکان قائم تکیه از تکیه در A با شدتی $k = 5 \frac{kN}{cm}$

چنین C_m برابر دردی ندارد.



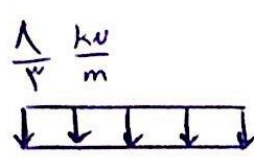
$$\frac{15}{16} \text{ "۲"}$$

$$\frac{1}{2} \text{ "۱"}$$

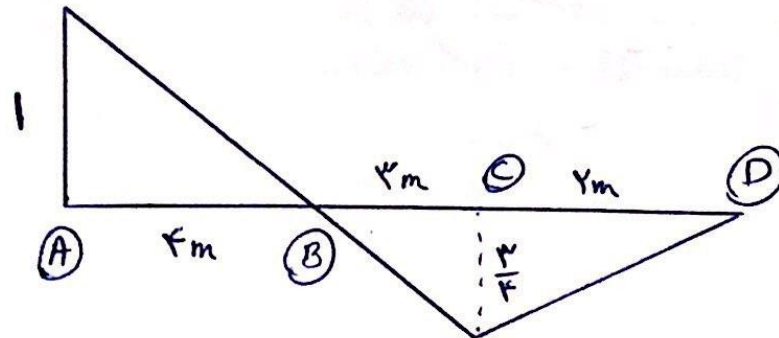
$$\frac{14}{15} \text{ "۴"}$$

$$1 \text{ "۳"}$$

حل: گزینش $F = \frac{1}{3} \frac{kN}{m}$



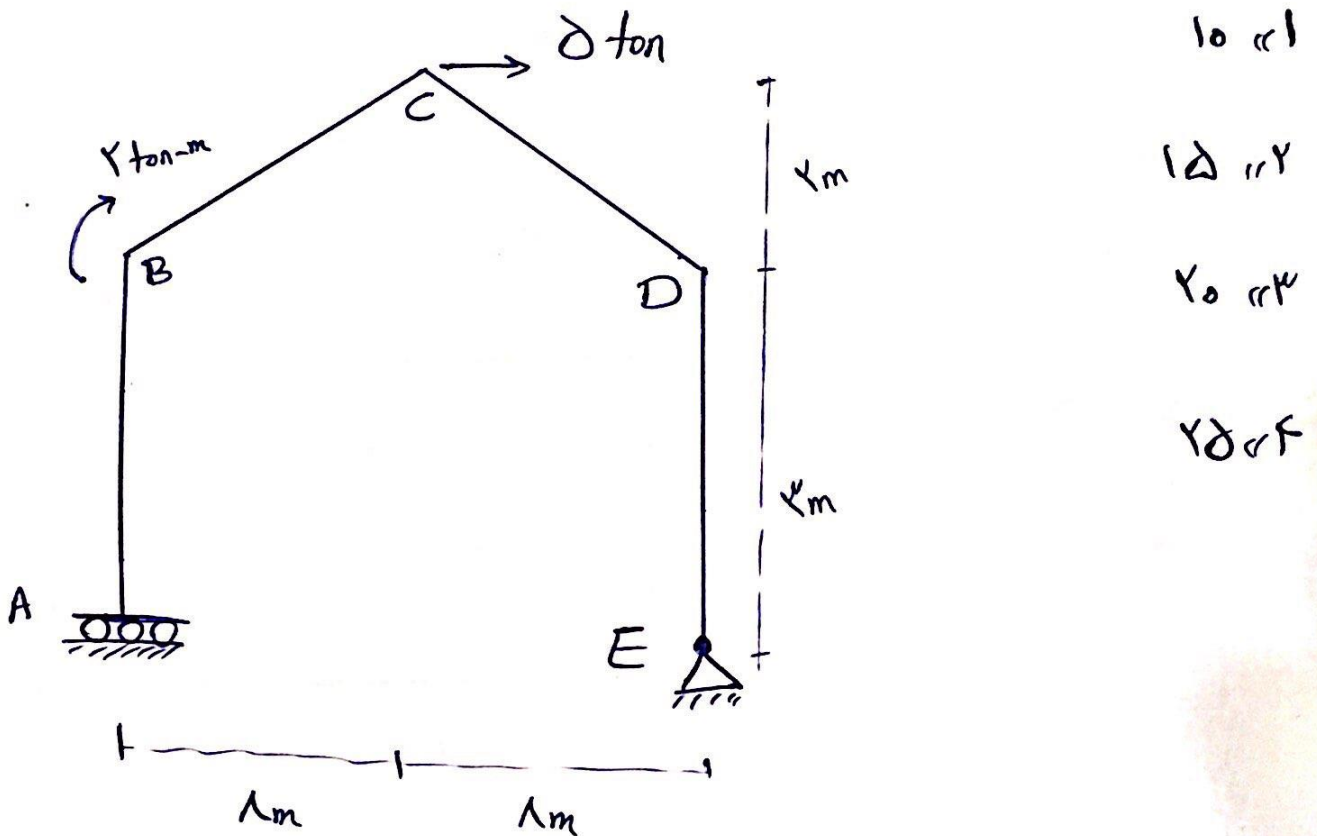
نمودار خفای تأثیر علی العجل A :



$$R_{A_{max}} = \left(\frac{F \times 1}{2} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3} (kN) \rightarrow \Delta_{A_{max}} = \frac{14}{3} = \frac{14}{10} (cm)$$

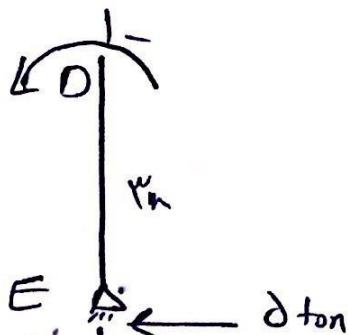
مساحت نمودار خفای تأثیر / شدت بار

۱۳- در قاب سبب دار، $ABCDE$ مطابق شکل، گنبد M_{DC} چند ton-m تنضیب زده می‌شود؟ (سختی ضعیفی همه‌ی اعضا EI است)



حل: گزینشی ۲ = صریح است.

در کل قاب: $\sum F_x = 0 \rightarrow E_x = \delta \text{ ton}$

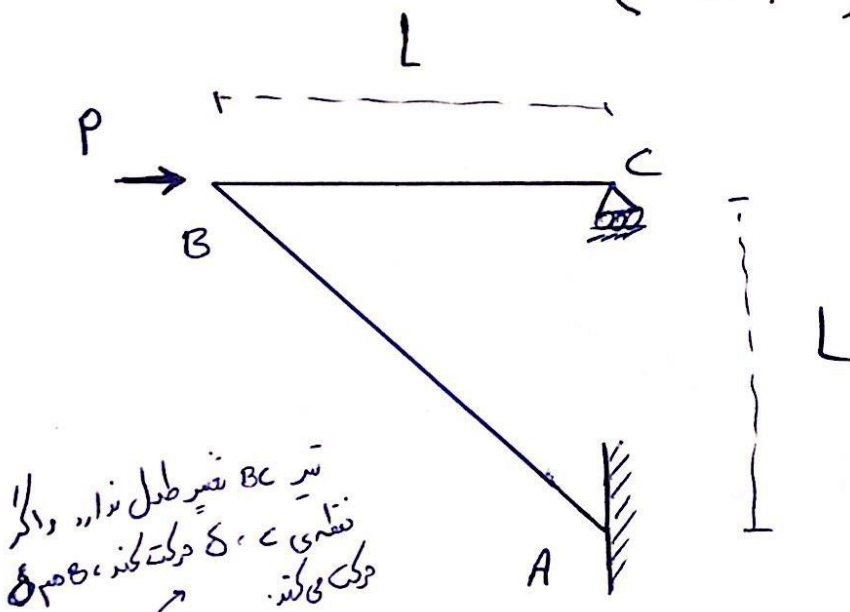


$$M_{DE} = \delta \times 4 = 10 \text{ ton-m}$$

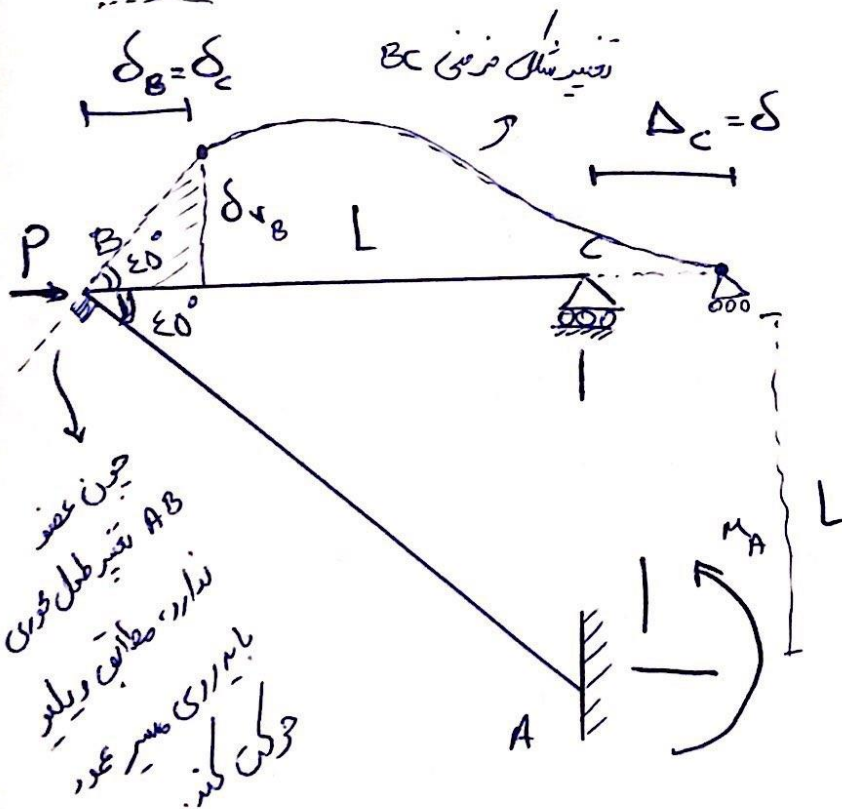
۱۴- در سازه‌ی مطابق شکل تحت اثر نیروی P در B ، اگر تغییر مکان افقی

C برابر $\delta = 0.4 \frac{PL^3}{EI}$ باشد، تغییر مکان قائم B را نسبت AB به

ترتیب بگردانید؟ (ثابت EI)



تیر BC تغییر طول ندارد، و اگر نقطه‌ی C حرکت کند، B هم حرکت می‌کند.



چون عضو AB تغییر طول خودی ندارد، مطابق ویلر باید روی مسیر عمود حرکت کند.

۱- PL, δ

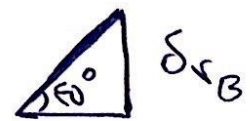
۲- $\sqrt{2}PL, \delta$

۳- $PL, \sqrt{2}\delta$

۴- $\sqrt{2}PL, \sqrt{2}\delta$

حل: گزینش! صریح است.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A = PL$$



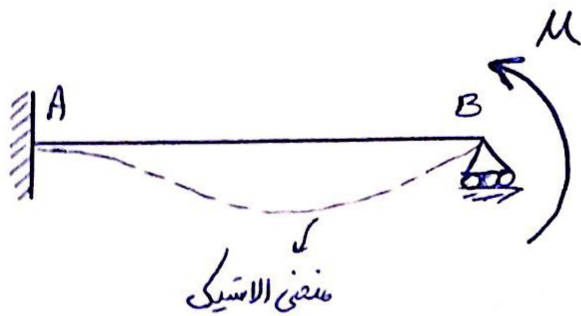
$$\delta_{H_B} = \delta_C = \delta$$

$$\delta_{\nu_B} = \delta$$

شکل هندسی الاساسی قائم الزامی

$\Delta = 1$ - در تصویر زیر به طول L و صلبیت EI تحت گشت متمرکز M در تکیه گاه

B ، سطح محصور بین محور اولیه و منحنی الاستیک چه فرقی از $\frac{M L^3}{EI}$ است؟



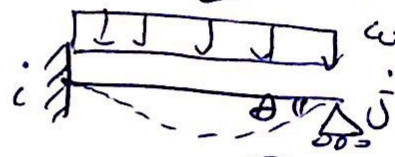
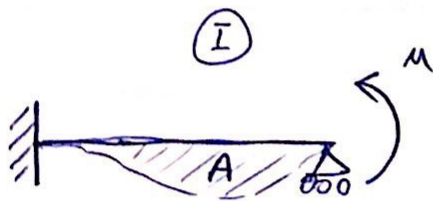
$\frac{1}{36}$ "۱"

$\frac{1}{48}$ "۲"

$\frac{1}{64}$ "۳"

$\frac{1}{72}$ "۴"

حل: گزینش ۲ صحیح است.



تبی ماکسول

$$\omega \times A = M \times \theta \Rightarrow A = \frac{M\theta}{\omega}$$

تکیه گاه چپ

مطابق سبب افت

در تیر II

$$M_{ji} = \frac{YEI}{L} (r\theta_j + \theta_c - \frac{3\delta_{ij}}{L}) + \frac{\omega L^2}{12} = 0$$

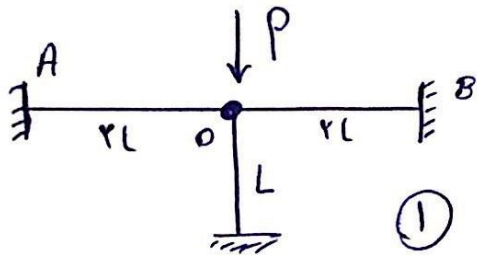
$$\Rightarrow \theta = \theta_j = \frac{\omega L^3}{48EI}$$

$$\Rightarrow A = \frac{ML^3}{48EI} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۱۶- مطابق دو سازهی زیر، برای اینکه لنگر A در هر دو سازه برابر شود، سفتی

فنر (k) چه نسبتی از $\frac{EI}{L^3}$ باید باشد؟ (I همان انبساطی، A سازه است)

E مدول الاستیسیته، $I = AL^2$

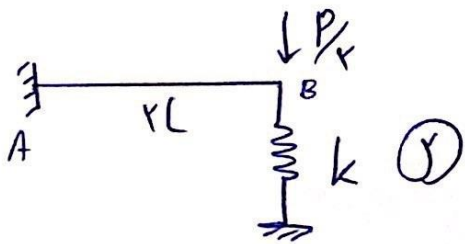


$$\frac{1}{4} \ll 2$$

$$\frac{1}{2} \ll 1$$

$$4 \ll 2$$

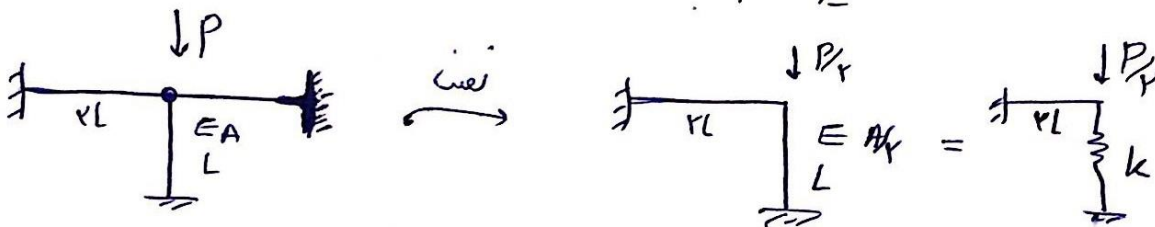
$$2 \ll 3$$



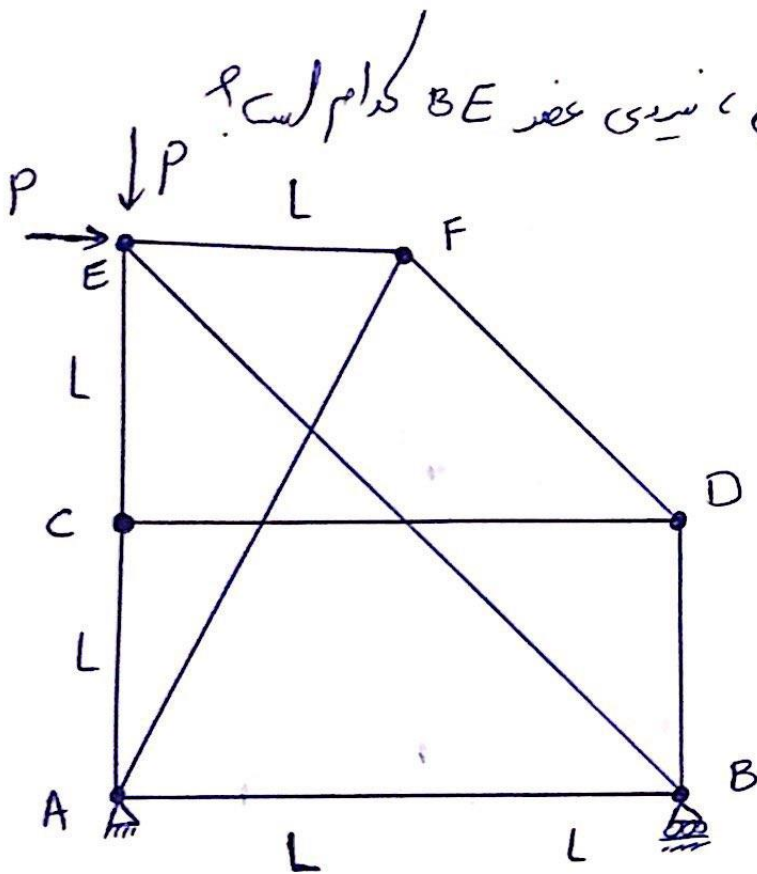
حل: گزینی! صریحاً است.

سازهی دوم نصف شدهی سازهی اول است، پس گافیت سفتی محوری میانی

وسط را نصف کنیم تا برابر k شود:



$$\Rightarrow k = \frac{EA}{2L} \xrightarrow{A = \frac{I}{L^2}} k = \frac{EI}{2L^3}$$



۱۷- در سازه‌ی فریابی عابلی، نیروی عضو BE کدام است؟

۱ " $-\sqrt{2}P$

۲ " $-\frac{\sqrt{2}}{2}P$

۳ " صفر

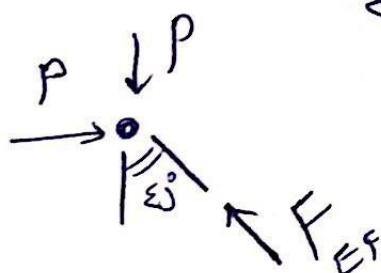
۴ " ناپایدار است.

حل: گزینی ۱ = صحیح است.

اگر فریاب را بدون هیچ بارگذاری بررسی کنیم، چون تمام اعضای آن عضو نیروی می‌شوند پس ناپایدار است.

① در گره C، عضو CD صفر ← در گره D عضو BD و FD صفر ←

② در گره F، عضو AF و EF صفر ←



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{EF} \sin 45^\circ = P$$

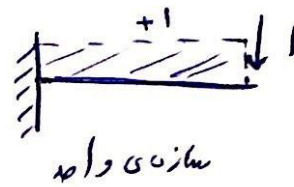
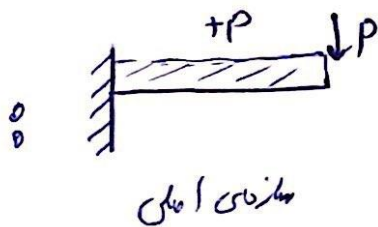
$$\Rightarrow F_{EF} = \sqrt{2}P \text{ (کشش)}$$

۱۸- در یک تیر طره به عمق h و عرض b و طول L که تحت بار p انتهای مکرر دارد، اگر تغییر شکل ناشی از بیش را در تقایب با بخش در نظر بگیریم، خیز در صدها جا به جا به انتهای تیر اصفانه شود $(b = \frac{h}{2}, L = \Delta h)$ و $G = 0.4E$ (مدول ارتجاعی)

۱۰۰٪ ۵۰٪ ۳۰٪ ۱۰٪

حل: گزینی ۲ صحیح است.

تغییر شکل ناشی از بیش



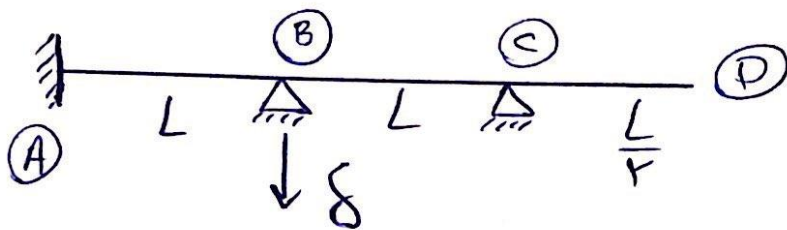
$$\delta_v = \int \frac{v(x) \cdot V(x) dx}{G \cdot A_s} \xrightarrow{\text{تغییر صورت}} \delta_v = \frac{P L x}{G \times \frac{\Delta}{2} (bh)} = \frac{4p(\Delta h)}{G \times \Delta bh} = \frac{12P}{Gh}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ناشی از بخش: } \frac{PL^3}{3EI} \\ \text{ناشی از بیش: } \frac{12P}{Gh} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{درصد اصفانه}} \frac{\frac{12P}{Gh}}{\frac{PL^3}{3EI}} \times 100$$

$$\underline{\underline{\text{درصد اصفانه}}} = \frac{12P \times 3EI}{PL^3 \times Gh} = \frac{12 \times 3 \times E \times \frac{bh^3}{12}}{(12\Delta h^3)(0.4Eh)} \times 100 = 3\%$$

۱۹- در تیر زیر، اگر تکیه گاه B به اندازه δ نشست کند، گشتاور تکیه گاه

A به چه مقداری از $\frac{EI\delta}{L^2}$ است؟



۱۲ "۱

۱۷ "۲

۲۲ "۳

۲۷ "۴

حل: با استفاده از روش گزینشها نیست.

(FEM یا ضوابط)

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow$$

$$\left[\frac{2EI}{L} (\theta_B + \theta_A - \frac{3\delta_{A/B}}{L}) \right]_{AB} + \left[\frac{2EI}{L} (\theta_B - \frac{\delta_{B/C}}{L}) \right]_{BC} = 0$$

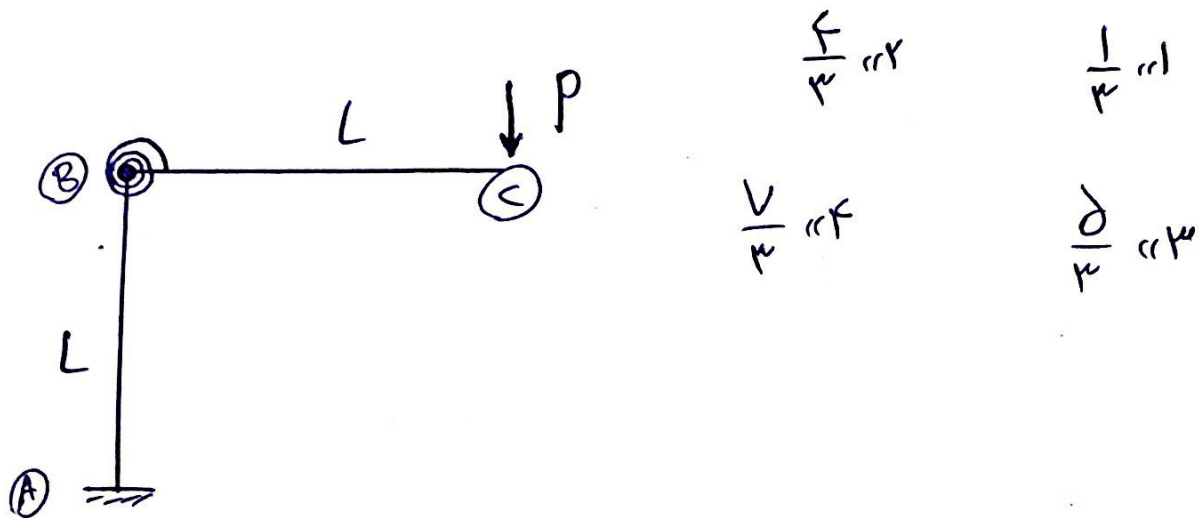
$$\Rightarrow (4\theta_B - \frac{4\delta}{L}) + (2\theta_B + \frac{3\delta}{L}) = 0 \Rightarrow 7\theta_B = \frac{3\delta}{L}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{3}{7} \frac{\delta}{L}$$

$$M_A = M_{AB} = \frac{2EI}{L} (\theta_A + \theta_B - \frac{3\delta_{A/B}}{L}) = \frac{2EI}{L} (\frac{3}{7} \frac{\delta}{L} - \frac{3\delta}{L}) = -\frac{34}{7} \frac{EI\delta}{L^2}$$

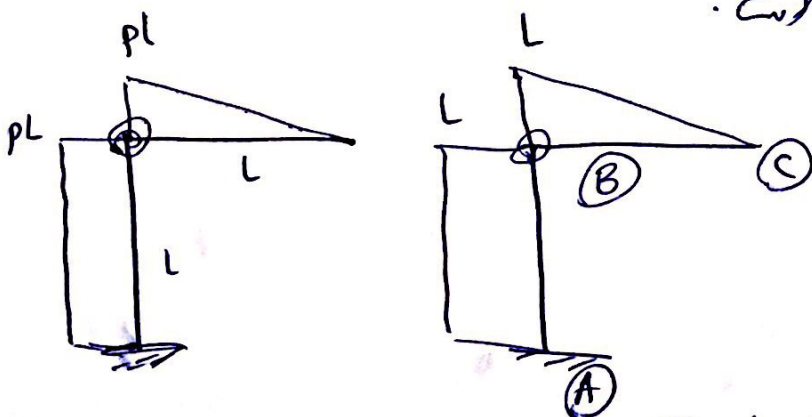
۲۰- اگر سفتی دورانی فنر $\theta = \frac{EI}{L}$ باشد، تغییر مکان انتهای طره زیر بار

P چه قدری از $\frac{PL^3}{EI}$ است؟



حل: گزینش ۳ صحیح است.

کار مجازی:



$$\delta v_c = \left[\frac{PL \times L}{EI} \times \frac{1}{3} L \right]_{BC} + \left[\frac{PL \times L \times L}{EI} \right]_{AB} + \left[\frac{(PL)(L)}{\frac{EI}{L}} \right]_{\text{فنر}}$$

$$\Rightarrow \delta v_c = \frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI}$$